5° Μάθημα:

11/11/2019

Προσιτή $i \to j$

Επικοινωνούν $i \leftrightarrow j$

Ορισμοί επαν/τας:

Επαν/κή — Θετικώς
Παροδική — αδαφώς

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \quad X_r \neq j,\ r<n \mid X_0 = i)$$

i επαν/κη $\quad f_{ii}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$

i παροδική $\quad f_{ii}^{*} < 1$

Θετικώς επ/κη: αν είναι επαν/κη $\mu_i = \sum n f_{ii}^{(n)} < +\infty$
διαφορετικά αδαφώς επαν/κη.

Ορισμός:
Η κατάσταση $i \in S$ λέγεται απορροφητική όταν $P_{ii}^{(1)} = 1$
(Η κίνηση σταματά δηλ. παραμένει εκεί)

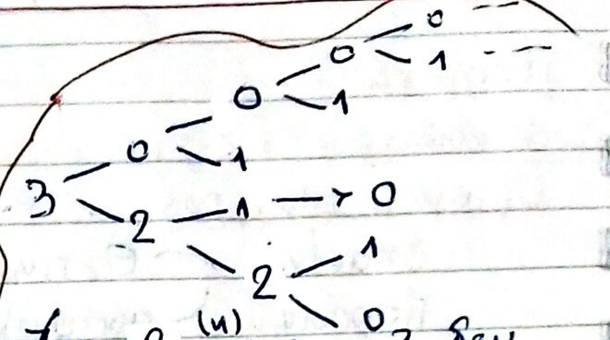
Ορισμός:
Περίοδος μιας κατάστασης $i \in S$ λέγεται ο Μ.Κ.Δ. όλων των ακεραίων $n \geq 1$ για τους οποίους $P_{ii}^{(n)} > 0$ (Συμβ.: d_i)

Ορισμός:
Μια κατάσταση λέγεται απεριοδική αν η περίοδος της ισούται με 1 δηλ. αν $d_i = 1$

Ορισμός:
Μια κατάσταση λέγεται εργοδική αν είναι απεριοδική και θετικώς επαν/κη

Παραδείγματα κατανόησης της έννοιας της περιόδου:

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$\nexists n$ $P_{33}^{(n)} > 0$, η 3 δεν έχει περίοδο

$d_0 = ?$ ΜΚΔ των ακεραίων $n \geq 1$ τ/ω $P_{00}^{(n)} > 0$

$P_{00}^{(1)} > 0$ ΜΚΔ $\{1, \ldots\} = 1$.

$d_0 = 1$

$d_2 = 1$

$d_1 = ?$ $P_{11}^{(1)} = 0$, $P_{11}^{(2)} = P(1 \to 0 \to 1) = \frac{1}{2}$ > 0

$P(1 \to 0) \cdot P(0 \to 1) = 1 \cdot 1/2 = 1/2$

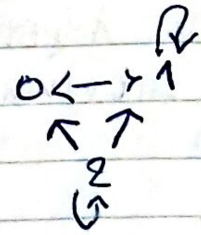
$P_{11}^{(3)} = P\left(1 \to 0 \begin{array}{l} \to 0 \to 1 \\ \cancel{\to 1 \to 1} \end{array}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0$

ΜΚΔ$(2, 3) = 1$

Γιατί σταματήσαμε στο 3° βήμα?
επειδή ΜΚΔ$\{2,3\} = 1$ και ΜΚΔ$\{1, \ldots\} = 1$
αν είχα ΜΚΔ$\{2, 4\} \neq 1$ θα συνέχιζα και στο 5° βήμα.

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$0 \not\to 2$ | Άρα 0 κ 2 δεν
$2 \to 0$ | επικοινωνούν



Διαχ. Μ.Α.

$d_0 = ?$

$P_{00}^{(1)} = 0$

$P_{00}^{(2)} = P(0 \to 1 \to 0) = 1/2$

$P_{00}^{(3)} = P\left(0 \to 1 \begin{array}{l} \to 1 \to 0 \\ \to 0 \not\to 0 \end{array}\right) > 0$ ΜΚΔ$\{2, 3, \ldots\} = 1$.

$d_1=1$ διότι $p_{11}^{(1)}>0$

$d_2=1$ διότι $p_{22}^{(1)}>0$

Ορισμός: Η περίοδος μιας Μ.Α. είναι ο Μ.Κ.Δ. των περιόδων των καταστάσεων της.

$$F_{ij}(1)=\sum f_{ij}^{(n)}$$
$$F_{ii}(1)=\sum \underset{f_{ii}^*}{\overset{\|}{f_{ii}^{(n)}}}$$

Πρόταση: Αν $P_{ij}(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$

και $F_{ij}(s)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$, $|s|<1$

Τότε $F_{ij}(s)=\dfrac{P_{ij}(s)}{1+P_{jj}(s)}$ κ' $P_{ij}(s)=\dfrac{F_{ij}(s)}{1-F_{jj}(s)}$

Απόδ: (αν θελήσω να τους χρησιμοποιήσω, πρώτα θα μας ζητήσει να τους αποδείξουμε)

s^1: $p_{ij}^{(1)}=f_{ij}^{(1)}$

s^2: $p_{ij}^{(2)}=$ P(να πάω από το i στο j σε δύο βήματα)

$$=P\left(\begin{array}{l} i \xrightarrow{n} j \to j \\ \quad\searrow r \to j \\ \quad\ \ r\neq j \end{array}\right)=p_{ij}^{(1)}\cdot p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(2)}$$

$$=f_{ij}^{(1)}\cdot p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(2)}$$

s^3: $$p_{ij}^{(3)}=P\left(\begin{array}{l} i \xrightarrow{n} j \xrightarrow{\text{σε δύο βήματα}} j \\ \quad\searrow^{n} r \to j \to j \\ \quad\searrow^{n} r \to \rho \to j \end{array}\right)=$$

$$=f_{ij}^{(1)}\cdot p_{jj}^{(2)}+f_{ij}^{(2)}\cdot p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(3)}$$

s^4: $$p_{ij}^{(4)}=f_{ij}^{(1)}\cdot p_{jj}^{(3)}+f_{ij}^{(2)}\cdot p_{jj}^{(2)}+f_{ij}^{(3)}\cdot p_{jj}^{(1)}+f_{ij}^{(4)}$$

$$\begin{aligned} P_{ij}(s)=\ & f_{ij}^{(1)}\left(s^1+s^2p_{jj}^{(1)}+s^3p_{jj}^{(2)}+\dots\right) \\ &+f_{ij}^{(2)}\left(s^2+s^3p_{jj}^{(1)}+s^4p_{jj}^{(2)}+\dots\right) \\ &+f_{ij}^{(3)}\left(s^3+s^4p_{jj}^{(1)}+\dots\right) \\ &+\dots\dots\dots\dots = \end{aligned}$$

$$= s\cdot f_{ij}^{(1)}\left(1 + s^1 P_{jj}^{(1)} + s^2\cdot P_{jj}^{(2)} + \dots\right)$$
$$+ s^2 f_{ij}^{(2)}\left(1 + s^1 P_{jj}^{(1)} + s^2 P_{jj}^{(2)} + \dots\right)$$
$$+ s^3 f_{ij}^{(3)}\left(1 + s^1 P_{jj}^{(1)} + \dots\right)$$
$$+ \dots$$
$$= (1 + P_{jj}(s))\cdot\left(s f_{ij}^{(1)} + s^2 f_{ij}^{(2)} + \dots\right)$$

$$P_{ij}(s) = (1 + P_{jj}(s))\cdot F_{ij}(s) \quad (1)$$

Από την (1) $\quad F_{ij}(s) = \dfrac{P_{ij}(s)}{1 + P_{jj}(s)} \quad (2)$

Από την (1) για $i = j$ έχω:

$$P_{jj}(s) = (1 + P_{jj}(s))\cdot F_{jj}(s) \Rightarrow$$
$$P_{jj}(s) = \frac{F_{jj}(s)}{1 - F_{jj}(s)} \quad (3)$$

Άρα είναι στην (1) με χρήση της (3)

$$P_{ij}(s) = \left[1 + \frac{F_{jj}(s)}{1 - F_{jj}(s)}\right]\cdot F_{ij}(s)$$

Λήμμα Abel: Έστω $\{c_k\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών όρων.
Αν $G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k s^k$ συγκλίνει για $|s| < 1$ τότε

$$\lim_{s \to 1} G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k$$

Θεώρημα: Έστω $j \in S$ μια κατάσταση μιας στασιμης Μ.Α. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(1) j παροδική αν-ν η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{(n)}$ συγκλίνει

και τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$ συγκλίνει.

(ΙΙ) j επαν/κη αν-ν $\Sigma P_{jj}^{(n)}$ αποκλίνει και τότε αποκλίνει και η $\Sigma P_{ij}^{(n)}$ $\forall i$ $i \to j$

Αποδ:

(Ι) j παροδική αν-ν $f_{jj}^{*} < 1$ δηλ. αν-ν $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1$

δηλ. αν-ν $F_{jj}(1) < 1$

Είναι $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{jj}(1) \overset{(3)}{=} \dfrac{F_{jj}(1)}{1 - f_{jj}(1)}$

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) \overset{(3)}{=} \dfrac{F_{ij}(1)}{1 - F_{jj}(1)} < +\infty.$

(ΙΙ) j επαν/κη αν-ν $f_{jj}^{*} = 1$ δηλ. αν-ν $\sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$

δηλ. αν-ν $F_{jj}(1) = (1)$

Είναι $\Sigma P_{jj}^{(n)} = P_{jj}(1) \overset{(3)}{=} \dfrac{F_{jj}(1)}{1 - F_{jj}(1)} = \dfrac{1}{0} = +\infty.$

$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)} = P_{ij}(1) \overset{(3)}{=} \dfrac{F_{ij}(1)}{1 - F_{jj}(1)} \overset{\text{όχι μηδέν}}{=} +\infty.$

πότε αποκλίνει; όταν. $F_{ij}(1) \neq 0$

$F_{ij}(1) = \Sigma f_{ij}(n)$ και είναι $\neq 0$ όταν $i \to j$

Παρατηρηση: Έχω δει ξει j παροδική αν-ν $\sum_{n=1}^{+\infty} P_{jj}^{(n)}$ συγκλ. και τότε συγκλ. $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^{(n)}$

Στόχος: $\lim_{n \to +\infty} P_{ij}^{(n)}$, $\lim_{n \to \infty} P_{jj}^{(n)}$

αυτός είναι ο n-οστός όρος σειράς

Όταν έχω παροδικές καταστάσεις $\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{(n)} = 0 = \lim_{n \to \infty} P_{jj}^{(n)}$

Θεώρημα: Έστω $j \in S$ μια επαν/κή κ' απεριοδική κατάσταση τότε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} P_{jj}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_j}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} = \frac{F_{ij}^{(1)}}{\mu_j} \quad \text{όπου } \mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{jj}^{(n)} \text{ και}$$

$$F_{ij}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

Παρατήρηση: Αφού $\mu_j = +\infty$ όταν j αδαφώς επαν/κή προκύπτει άμεσα το συμπέρασμα ότι οι οριακές πιθανότητες για τις αδαφώς επαν/κές είναι 0.

Παρατήρηση: Συνοψίζοντας τα παραπάνω οι οριακές πιθαν. για τις παροδικές κ' τις αδαφώς επαναλ. είναι μηδέν και μένει να βρούμε έναν εύκολο τρόπο προσδιορισμού τους σε περίπτωση των θετικώς επαν/κών

1η Πρόταση: Αν $i \in S$ είναι επαν/κή και $i \to j$ τότε $j \to i$

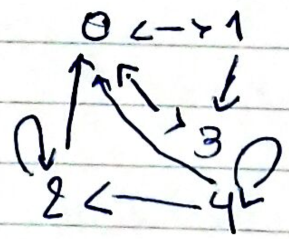
2η Πρόταση: Από επαν/κές καταστάσεις μόνο επαν/κές καταστάσεις είναι προσιτές. Δηλ. αν $i \in S$ επαν/κή $i \to j$ τότε j επαν/κή.

3η Πρόταση: Σε μια κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούντων καταστάσεων, όλες οι καταστάσεις είναι του ίδιου τύπου δηλ. είτε αδαφώς επαν/κές είτε θετ. επαν/κές είτε παροδικές

4η Πρόταση: Μια μη διαχωρίσιμη Μ.Α. με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων είναι θετ. επαν/κή.

π.χ.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \end{array}$$



• Είναι διαχωρίσιμη γιατί δεν επικοινωνούν όλες οι καταστάσεις με όλες.

π.χ. $4 \to 0$, $0 \not\to 4$ | Διαχ/μη Μ.Α.

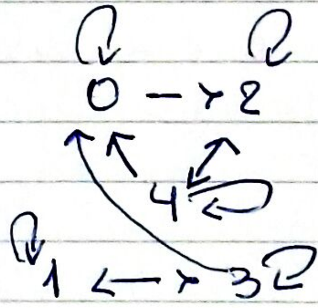
• $\exists$ κλειστό κύκλωμα καταστάσεων?
το 0, 1, 3 (η γραμμή καθε ένα από τα 0, 1, 3 μας δίνει άθροισμα 1)

Άρα Διαχ/ση Μ.Α. με τις $\{0,1,3\}$ να αποτελούν κλειστό κύκλωμα

• Είναι παροδική? (2 και 4 παροδικές διότι αν μπαίν στο κλειστό κύκλωμα 0, 1, 3 δεν βγαίναν)
Έστω 2 επαν/κή με $2 \to 0$ τότε πρέπει $0 \to 2$ Άτοπο
Άρα 2 παροδική. όμοια 4 παροδική.
Άρα οριακές πιθ. των 2 κι 4 είναι μηδέν.
$\{0,1,3\}$ κλειστό κυκλ. επικοιν. καταστ. πεπ. πλήθους άρα θετ. επαν/κές.

π.χ.

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1/2} & 0 & \boxed{1/2} & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1/3} & 0 & \boxed{2/3} \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ \boxed{1/3} & 0 & \boxed{1/3} & 0 & \boxed{1/3} \end{bmatrix} \end{array}$$



• $3 \to 0$, $0 \not\to 3$ | Διαχ/μη Μ.Α.

• $\{0,2,4\}$ κλειστό κύκλωμα επικοινων. καταστάσεων πεπερασμένα πλήθους $\Rightarrow$ θετ. επαν/κές.

1, 3 όχι κλειστό (άθροισμα γραμμών $\neq 1$)

• Έστω 1 επαν/κη , 1 → 0 τότε θα έπρεπε 0 → 1 άτοπο.
Άρα 1 παροδική.

Ασκήσεις • 1, 2, 3 δεν μπορούμε ακόμη
δικές του • 4, 5, 6, 7 μπορούμε να λύσουμε
8 εκτός ύλης :)
9, 10 παρόμοιες 1, 2, 3
11 μπορούμε
14, 15 τις έχουμε πει
16, 24 μπορούμε
29, 37, 40, 44, 46, 56